

УДК 539.3

## МНОГОСЕТОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ И ОБОЛОЧЕК<sup>1)</sup>

А.Д. МАТВЕЕВ<sup>1</sup>, А.Н. ГРИШАНОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск

<sup>2</sup> Новосибирский государственный технический университет

E-mail: mtv@icm.krasn.ru, grishanov@ngs.ru

## MULTI GRID MODELING 3D COMPOSITES CYLINDRICAL PANELS AND SHELLS

A.D. MATVEEV<sup>1</sup>, A.N. GRISHANOV<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institute of computational modelling SB RAS, Krasnojarsk,

<sup>2</sup> Novosibirsk State Technical University

### Аннотация

Изложены процедуры построения в декартовой системе координат однородных односеточных, композитных двухсеточных и сложных многосеточных криволинейных элементов для расчета линейно упругих трехмерных цилиндрических панелей и оболочек. Предлагаемые криволинейные конечные элементы описывают трехмерное напряженное состояние в оболочках и панелях, учитывают их неоднородную и микронеоднородную структуру и порождают дискретные модели малой размерности.

**Ключевые слова:** композиты, упругость, цилиндрические оболочки, панели, сложные многосеточные и двухсеточные криволинейные элементы.

### Summary

Constructing the homogeneous single-grid and composite double grid and multi grid curvilinear. Finite elements (FE) in cartesian coordinases for calculating three-dimensional cylindrical panels and shells is presented. Multi grid curvilinear elements are able to consider the heterogeneous and micro-inhomogeneous panel and shell structure, to give raise to the discrete models of small dimension.

**Key words:** composites, elasticity, cylindrical shells, panels, single-grid and multi-grid curvilinear finite elements.

---

### Введение

При расчете однородных и композитных цилиндрических панелей и оболочек используют приближенные теории. Общий недостаток этих теорий заключается в том, что в их основе лежат гипотезы (о характере распределения перемещений и напряжений), которые порождают неустранимую погрешность в решениях. Существующие теории не учитывают сложный характер закрепления панелей, оболочек (например, частичное закрепление по толщине толстых панелей и оболочек), не всегда точно описывают деформирование подкрепленных панелей и оболочек, на которые действуют локальные нагрузки.

В данной работе для расчета однородных и композитных цилиндрических панелей и оболочек по методу конечных элементов (МКЭ) предложены одно- и двухсеточные криволинейные конечные элементы (КЭ) и сложные криволинейные многосеточные КЭ (МнКЭ). При построении композитных двухсеточных

---

<sup>1)</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 14-01-00130)

КЭ (ДвКЭ) и сложных МнКЭ используются известные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядков (для аппроксимации функций перемещений) и уравнения трехмерной задачи теории упругости, которые записаны в локальных декартовых системах координат. Таким образом, в композитных ДвКЭ и МнКЭ реализуется трехмерное напряженное состояние. ДвКЭ и сложные МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, применяемые для анализа трехмерных упругих тел неоднородной структуры, рассмотрены в [1–3]. Показаны две процедуры построения в локальных декартовых системах координат трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ. Для построения ДвКЭ применяем две вложенные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением ДвКЭ, которое учитывает его композитную структуру. На базовом разбиении строим функционал полной потенциальной энергии ДвКЭ, представленный в матричной форме. На мелкой сетке определяем крупную сетку.

Согласно первой процедуре для построения ДвКЭ в функционале полной потенциальной энергии ДвКЭ с помощью аппроксимирующих функций перемещений, построенных на крупной сетке, выражаем узловые неизвестные мелкой сетки через узловые неизвестные крупной. Затем минимизируя функционал по узловым перемещениям крупной сетки, получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ.

Суть второй процедуры заключается в следующем. Вначале, неизвестные во всех внутренних узлах мелкой сетки ДвКЭ исключаем с помощью метода конденсации [4], т.е. на базовом разбиении ДвКЭ строим суперэлемент. Функционал полной потенциальной энергии суперэлемента представляем в матричной форме. В функционале потенциальной энергии суперэлемента с помощью аппроксимирующих функций перемещений, построенных на крупной сетке, узловые неизвестные суперэлемента выражаем через узловые неизвестные крупной сетки. Из минимизации функционала потенциальной энергии по узловым перемещениям крупной сетки получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ.

Показана процедура построения криволинейных сложных МнКЭ, которые применяются для расчета трехмерных цилиндрических панелей и оболочек, имеющих неоднородную и микрон неоднородную структуру. Здесь изложена процедура построения криволинейных однородных односеточных КЭ в декартовой системе координат.

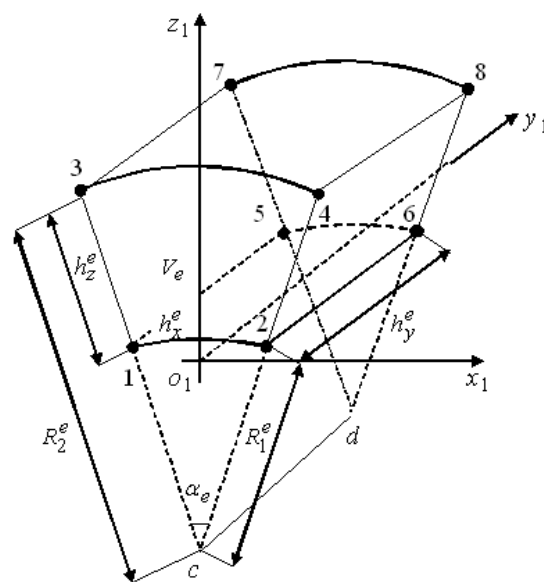


Рис. 1: КЭ  $V_e$  1-го порядка (ДвКЭ  $V_e^b$ )

На рис. 1 представлен однородный криволинейный КЭ  $V_e$  1-го порядка с характерными размерами

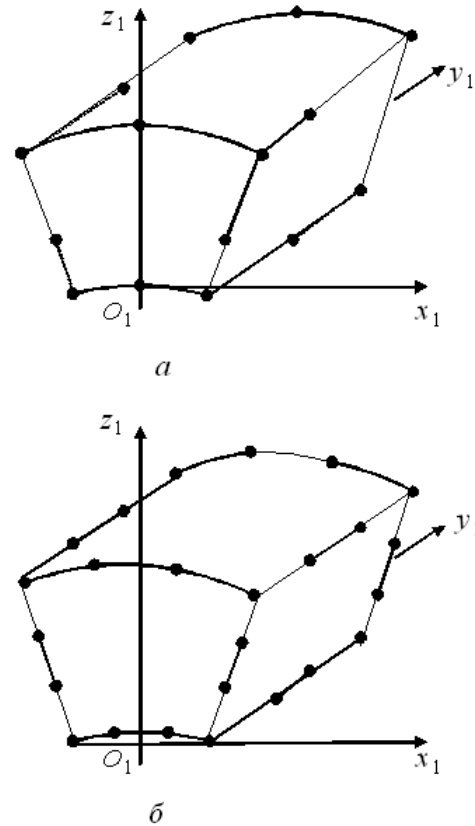


Рис. 2: КЭ  $V_e$ : а) 2-го, б) 3-го порядка

$h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ , где  $\alpha_e$  — угол раствора КЭ  $V_e$ ,  $O_1x_1y_1z_1$  — локальная декартова система координат,  $z_1O_1y_1$  — плоскость симметрии,  $cd$  — ось цилиндрической оболочки,  $R_1^e, R_2^e$  — радиусы нижней и верхней поверхностей элемента  $V_e$ ,  $h_z^e$  — толщина,  $h_y^e$  — длина КЭ  $V_e$ ,  $h_x^e = \alpha_e R_1^e$ , узлы отмечены точками. Прямоугольники размерами  $h_z^e \times h_y^e$  есть боковые грани, криволинейные прямоугольники со сторонами  $h_z^e, \alpha_e R_1^e, \alpha_e R_2^e$  — торцевые грани КЭ. Форма КЭ  $V_e$  есть прямая призма высотой  $h_y^e$ . Так как при мелком разбиении углы раствора криволинейных КЭ малы, (т.е. угол  $\alpha_e$  мал, рис. 1), то их формы мало отличаются от форм прямоугольных параллелепипедов. В связи с этим для аппроксимации перемещений однородных криволинейных КЭ 1-го, 2-го и 3-го порядков используем известные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядков [4, 5] и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат данных КЭ (рис. 1, 2), т.е. в КЭ  $V_e$  реализуется трехмерное напряженное состояние.

Композитные ДвКЭ и сложные МнКЭ имеют такие же геометрические формы, как и КЭ  $V_e$  (рис. 1). При построении ДвКЭ и МнКЭ используем трехмерные однородные криволинейные односеточные КЭ первого порядка (рис. 1). Матрицы жесткости и векторы узловых сил криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ определяем в локальных декартовых системах координат, а системы уравнений МКЭ для дискретных моделей оболочек и панелей — в глобальных декартовых системах координат. Связь между локальными и глобальными декартовыми системами координат осуществляется с помощью матриц вращений [4], которые определяем только для векторов узловых перемещений ДвКЭ и МнКЭ.

### 1. Односеточные однородные криволинейные элементы

Рассмотрим односеточный трехмерный однородный криволинейный КЭ  $V_e$  1-го порядка с характерными размерами  $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$  (рис. 1). Перемещения, деформации и напряжения элемента удовлетворяют соотношениям Коши и закону Гука, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости, т.е. во всей

области КЭ  $V_e$  реализуется трехмерное напряженное состояние. Для аппроксимирующих функций перемещений  $u_e, v_e, w_e$  элемента  $V_e$  используем полином 1-го порядка, записанный в локальной декартовой системе координат  $O_1x_1y_1z_1$ ,

$$u_e, v_e, w_e = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1 + a_4x_1y_1 + a_6z_1x_1 + a_7z_1y_1 + a_8x_1y_1z_1. \quad (1)$$

Используя (1), по алгоритмам МКЭ [4, 5] строим аппроксимирующие функции перемещений  $v_e, w_e$  КЭ  $V_e$ , которые запишем в виде

$$u_e = \sum_{i=1}^8 N_i u_i^1, \quad v_e = \sum_{i=1}^8 N_i v_i^1, \quad w_e = \sum_{i=1}^8 N_i w_i^1, \quad (2)$$

где  $u_i^1, v_i^1, w_i^1$  — перемещения узла  $i$ ,  $N_i$  — функция формы  $i$ -го узла КЭ  $V_e$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .

Вектор функций перемещений  $\mathbf{U}_e = \{u_e, v_e, w_e\}^T$  КЭ  $V_e$  представим в форме

$$\mathbf{U}_e = [N_e] \delta_e^1, \quad (3)$$

где  $\delta_e^1$  — вектор узловых неизвестных КЭ  $V_e$ , имеющий в декартовой системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  вид

$$\delta_e^1 = \{u_1^1, \dots, u_8^1, v_1^1, \dots, v_8^1, w_1^1, \dots, w_8^1\}^T, \quad (4)$$

$[N_e]$  — матрица функций формы КЭ  $V_e$ .

Для полной потенциальной энергии КЭ  $V_e$  получаем выражение

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_e^T \sigma_e dV - \int_{V_e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e dV - \int_{S_e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{q}_e dS, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_e = \{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}, \gamma_{x_1y_1}, \gamma_{x_1z_1}, \gamma_{y_1z_1}\}^T$ ,  $\sigma_e = \{\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{z_1}, \tau_{x_1y_1}, \tau_{x_1z_1}, \tau_{y_1z_1}\}^T$  — векторы функций деформаций и напряжений, отвечающее локальной системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  КЭ  $V_e$ ;  $\mathbf{F}_e, \mathbf{q}_e$  — векторы объемных и поверхностных сил КЭ  $V_e$ ;  $V_e, S_e$  — область и поверхность КЭ  $V_e$ .

Соотношения Коши и закон Гука для КЭ  $V_e$  представим [4, 5]

$$\varepsilon_e = [B_e] \delta_e^1, \quad \sigma_e = [D_e] \varepsilon_e, \quad (6)$$

Подставляем (3), (6) в функционал (5) и минимизируя его, получаем формулы для нахождения матрицы жесткости  $[K_e^1]$  и вектора узловых сил  $\mathbf{P}_e^1$  КЭ  $V_e$ :

$$[K_e^1] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e] [B_e] dV, \quad \mathbf{P}_e^1 = \int_{V_e} [N_e]^T F_e dv - \int_{S_e} [N_e]^T dS.$$

Процедуры построения трехмерных однородных односеточных криволинейных КЭ 2-го, 3-го порядков (рис. 2), имеющих такую же форму, как и КЭ  $V_e$  (рис. 1), аналогичны выше описанной.

## 2. Композитные криволинейные двухсеточные конечные элементы

Рассмотрим две процедуры построения трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ.

**2.1.** Основные положения первой процедуры построения композитного ДвКЭ рассмотрим на примере ДвКЭ  $V_a$  3-го порядка, рис. 3, где  $Oxyz$  — локальная декартова система координат,  $zOy$  — плоскость симметрии,  $h_z^a$  — толщина,  $h_y^a$  — длина ДвКЭ  $V_a$ . Не теряя общности суждений, считаем, что ДвКЭ  $V_a$  армирован волокнами, направленными вдоль оси  $Oy$ . Пусть между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ  $V_a$  связи идеальны. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов ДвКЭ  $V_a$  удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости, т.е. во всей области ДвКЭ  $V_a$  реализуется трехмерное напряженное состояние. Область ДвКЭ  $V_a$

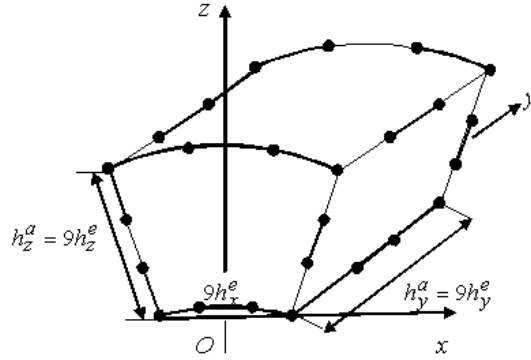


Рис. 3: ДвКЭ  $V_a$  3-го порядка (МнКЭ  $V_m$ )

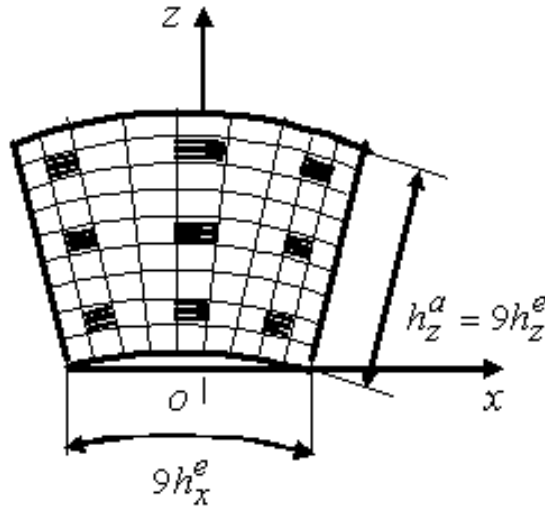


Рис. 4: Сечение ДвКЭ  $V_a$

представляем базовым разбиением  $R_a$ , которое состоит из трехмерных однородных односеточных криволинейных КЭ  $V_e$  1-го порядка с характерными размерами  $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$  (рис. 1). На рис. 4 сечение ДвКЭ  $V_a$  представлено узловой сеткой базового разбиения, сечения волокон закрашены. Базовое разбиение  $R_a$  учитывает неоднородную структуру ДвКЭ  $V_a$  и порождает мелкую криволинейную трехмерную сетку  $h_a$ .

На мелкой сетке  $h_a$  определяем крупную сетку  $H_a$ . Узлы крупной сетки  $H_a$  на рис. 3 отмечены точками (32 узла). На сетке  $H_a$  строим аппроксимирующие функции  $u_a, v_a, w_a$  ДвКЭ  $V_a$ , используя полином 3-го порядка, записанный в системе координат  $Oxyz$  (рис. 3),  $u_a, v_a, w_a = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6zx + a_7zy + \dots + a_{32}z^3xy$ . Используя полиномы 3-го порядка по алгоритмам МКЭ на крупной сетке  $H_a$  для ДвКЭ  $V_a$  определяем аппроксимирующие функции перемещений в виде

$$u_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a u_i^a, \quad v_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a v_i^a, \quad w_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a w_i^a, \quad (7)$$

где  $u_i^a, v_i^a, w_i^a, N_i^a$  — перемещения и функция формы  $i$ -го узла крупной сетки  $H_a, i = 1, \dots, 32$ .

Обозначим через  $\delta_a$  вектор узловых неизвестных крупной сетки  $H_a$ . Пусть ось  $O_1y_1$  системы координат КЭ  $V_e$  (расположенного в области ДвКЭ  $V_a$ ), рис. 1, параллельна оси  $Oy$  системы координат ДвКЭ  $V_a$ , рис. 3, и между осями  $O_1x_1$  и  $Ox$  угол равен  $\beta_e$ . Обозначим через  $\delta_e$  вектор узловых неиз-

вестных КЭ  $V_e$  (отвечающий декартовой системе координат  $Oxyz$ ), который представим в виде

$$\delta_e = \{u_1^e, \dots, u_8^e, v_1^e, \dots, v_8^e, w_1^e, \dots, w_8^e\}, \quad (8)$$

где  $u_i^e, v_i^e, w_i^e$  – перемещения  $i$ -го узла КЭ  $V_e$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .

Векторы  $\delta_e^1, \delta_e$  связаны соотношением  $\delta_e^1 = [T_e]\delta_e$ , где  $[T_e]$  – матрица вращений [4], размерности  $24 \times 24$ , которая в силу (4), (8) имеет структуру

$$[T_e] = \begin{bmatrix} [E_1] & [E_0] & [E_2] \\ [E_0] & [E] & [E_0] \\ -[E_2] & [E_0] & [E_1] \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где подматрицы имеют размерность  $8 \times 8$ ;  $[E_0]$  – нулевая и  $[E]$  – единичная матрицы,  $[E_1] = \cos\beta_e[E]$ ,  $[E_2] = \sin\beta_e[E]$ .

Учитывая связь между  $\delta_e^1$  и  $\delta_e$ , получим [5]  $[K_e] = [T_e]^T[K_e^1][T_e]$ ,  $\mathbf{P}_e = [T_e]^T\mathbf{P}_e^1$ , где  $[K_e]$  – матрица жесткости и  $[P_e]$  – вектор узловых сил КЭ  $V_e$  (отвечающие системе координат  $Oxyz$ ). Полную потенциальную энергию  $W_a$  для базового разбиения  $R_a$  запишем в форме

$$W_a = \sum_{i=1}^M \left( \frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (10)$$

где  $M$  – общее число КЭ  $V_e$  базового разбиения  $R_a$ .

С помощью аппроксимаций (7) вектор  $\delta_e$  выражаем через вектор  $\delta_a$

$$\delta_e = [A_e^a] \delta_a, \quad (11)$$

где  $[A_e^a]$  – прямоугольная матрица, размерности  $24 \times 96$ ,  $e = 1, \dots, M$ .

Подставляем (11) в функционал (10) и минимизируя его, получаем

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e,$$

$[K_a]$  – матрица жесткости,  $\mathbf{F}_a$  – вектор узловых сил ДвКЭ  $V_a$ .

**2.2.** Вторую процедуру рассмотрим на примере построения ДвКЭ  $V_b$  3-го порядка. ДвКЭ  $V_b$  имеет размеры, форму и неоднородную структуру и расположен в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$  как и ДвКЭ  $V_a$  (рис. 3). В данной процедуре используем мелкую  $h_a$  и крупную  $H_a$  сетки, базовое разбиение  $R_a$  и аппроксимирующие функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$  ДвКЭ  $V_a$  (см. п. 2.1), т.е.  $\delta_a$  есть вектор узловых неизвестных ДвКЭ  $V_b$ . На базовом разбиении  $R_a$  ДвКЭ  $V_b$  с помощью метода конденсации [3] строим суперэлемент  $G_S$ . Полную потенциальную энергию  $W_s$  суперэлемента  $G_S$  запишем в виде

$$W_s = \frac{1}{2} \delta_S^T [K_S] \delta_S - \delta_S^T \mathbf{P}_S, \quad (12)$$

где  $\mathbf{P}_S, \delta_S$  – векторы узловых сил и неизвестных суперэлемента  $G_S$ , определяемые в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$  КЭ  $V_b$ .

Используя (7), между векторами  $\delta_S, \delta_a$  установим связь

$$\delta_S = [A_S] \delta_a, \quad (13)$$

где  $[A_S]$  – прямоугольная матрица,  $\delta_a$  – вектор узловых неизвестных ДвКЭ  $V_b$ .

Подставляем (13) в функционал (12) и минимизируя его, получаем

$$[K_b] = [A_S]^T [K_S] [A_S], \quad \mathbf{F}_b = [A_S]^T \mathbf{P}_S,$$

где  $[K_b]$  – матрица жесткости и  $\mathbf{F}_b$  – вектор узловых сил ДвКЭ  $V_b$ .

Процедуры построения трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ 1-го и 2-го порядка, имеющих такую же форму, как ДвКЭ  $V_a$  (ДвКЭ  $V_b$ ), аналогичны выше описанным процедурам (см. п. 2.1 и п. 2.2).

### 3. Композитные криволинейные сложные многосеточные конечные элементы

Рассмотрим процедуру построения криволинейного сложного композитного МнКЭ  $V_m$ , который расположен в локальной декартовой системе координат  $Oxyz$ , как показано на рис. 3, узлы крупной сетки  $H_m$  которого отмечены точками. МнКЭ  $V_m$  имеет 32 узла, которые расположены на его ребрах,  $h_z^a = 9h_z^e$  — толщина,  $h_y^a = 9h_y^e$  — длина МнКЭ  $V_m$ .

Область МнКЭ  $V_m$  представлена криволинейными композитными ДвКЭ  $V_e^b$ , построенными по процедуре п. 2.2. ДвКЭ  $V_e^b$ , расположенный в локальной декартовой системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  с характерными размерами  $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ ,  $h_x^e = \alpha_e R_1^e$ , показан на рис. 1, где  $\alpha_e$  — угол раствора ДвКЭ  $V_e^b$ ;  $R_1^e$ ,  $R_2^e$  — радиусы нижней и верхней поверхностей ДвКЭ  $V_e^b$ ,  $e = 1, \dots, N$ ,  $N$  — общее число ДвКЭ  $V_e^b$ , для рис. 3 имеем  $N = 729$ . Отметим, что МнКЭ  $V_m$  включает некоторое множество криволинейных мелких и крупных вложенных сеток ДвКЭ  $V_e^b$  и крупную сетку  $H_m$ . Базовые разбиения ДвКЭ  $V_e^b$  учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру МнКЭ  $V_m$ . Аппроксимирующие функции перемещений  $u_m$ ,  $v_m$ ,  $w_m$ , построенные на сетке  $H_m$ , применяем в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m u_i^m, \quad v_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m v_i^m, \quad w_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m w_i^m, \quad (14)$$

где  $N_i^m$  — базисная функция  $i$ -го узла крупной сетки  $H_m$ ;  $u_i^m$ ,  $v_i^m$ ,  $w_i^m$  — значения перемещений в  $i$ -м узле сетки  $H_m$  МнКЭ  $V_m$  (определяемые в декартовой системе координат  $Oxyz$ ),  $i = 1, \dots, 32$ .

Пусть  $\delta_m$  — вектор узловых неизвестных крупной сетки  $H_m$  МнКЭ  $V_m$ . Пусть ось  $O_1y_1$  системы координат элемента  $V_e^b$ , рис. 1, параллельна оси  $Oy$  системы координат МнКЭ  $V_m$ , рис. 3, и между осями  $O_1x_1$  и  $Ox$  угол равен  $\beta_e$ . Векторы  $\delta_e^1$ ,  $\delta_e^b$  узловых перемещений ДвКЭ  $V_e^b$ , отвечающие соответственно системам координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $Oxyz$ , представим в виде

$$\delta_e^1 = \{u_1^1, \dots, u_{32}^1, v_1^1, \dots, v_{32}^1, w_1^1, \dots, w_{32}^1\},$$

$$\delta_e^b = \{u_1^b, \dots, u_{32}^b, v_1^b, \dots, v_{32}^b, w_1^b, \dots, w_{32}^b\}.$$

Между векторами  $\delta_e^1$ ,  $\delta_e^b$  имеем связь  $\delta_e^1 = [T_e^b] \delta_e^b$ , где  $[T_e^b]$  — матрица вращений, размерности  $96 \times 96$ , которая имеет такую же структуру, как и матрица  $[T_e]$  (см. формулу (9)).

Учитывая связь между  $\delta_e^1$  и  $\delta_e^b$ , получим

$$[K_e^b] = [T_e^b]^T [K_e^1] [T_e^b], \quad \mathbf{P}_e^b = [T_e^b]^T \mathbf{P}_e^1,$$

где  $[K_e^1]$ ,  $[K_e^b]$  — матрицы жесткости и  $[P_e^1]$ ,  $[P_e^b]$  — векторы узловых сил ДвКЭ  $V_e^b$ , отвечающие соответственно системам координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $Oxyz$ .

Полную потенциальную энергию  $W_m$  МнКЭ  $V_m$  представим выражением

$$W_a = \sum_{e=1}^N \left( \frac{1}{2} (\delta_e^b)^T [K_e^b] \delta_e^b - (\delta_e^b)^T \mathbf{P}_e^b \right), \quad (15)$$

где  $N$  — общее число ДвКЭ  $V_e^b$ .

Используя (14), получаем равенство

$$\delta_e^b = [A_m^e] \delta_m, \quad (16)$$

где  $[A_m^e]$  — прямоугольная матрица.

Подставляем (16) в функционал (15) и минимизируя его, получим

$$[K_m] = \sum_{e=1}^N [A_m^e]^T [K_e^b] [A_m^e], \quad \mathbf{F}_m = \sum_{e=1}^N [A_m^e]^T \mathbf{P}_e^b,$$

где  $[K_m]$ ,  $F_m$  — матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МнКЭ  $V_m$ .

#### 4. Заключение

В данной работе показаны процедуры построения криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ, которые используются для расчета трехмерных композитных линейно упругих цилиндрических оболочек и панелей. Предлагаемые криволинейные ДвКЭ и сложные МнКЭ:

- описывают трехмерное напряженное деформированное состояние в оболочках и панелях;
- учитывают неоднородную и микрон неоднородную структуру панелей и оболочек;
- порождают двухсеточные и многосеточные дискретные модели панелей и оболочек, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей дискретных базовых моделей, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородных структур оболочек и панелей;
- сколь угодно точно (при мелких разбиениях) представляют напряженное деформированное состояние линейно упругих панелей и оболочек при действии локальных нагрузок;
- учитывают сложный характер крепления и нагружения панелей и оболочек.

Реализация МКЭ для двухсеточных и многосеточных дискретных моделей оболочек и панелей требует на несколько порядков меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых моделей.

Примеры расчетов консольных цилиндрических композитных панелей показывают следующее [6, 7]. Максимальные эквивалентные напряжения (перемещения) двухсеточных дискретных моделей цилиндрических панелей волокнистой структуры отличаются от максимальных эквивалентных напряжений (перемещений) базовых моделей панелей на  $1,6\% \div 2\%$  (на  $5,8\% \div 7,8\%$ ).

Реализация МКЭ для двухсеточных дискретных моделей панелей требует на два порядка меньше объема памяти ЭВМ и на порядок меньше временных затрат, чем для базовых моделей. Двухсеточные дискретные модели панелей состоят из композитных криволинейных ДвКЭ 3-го порядка (рис. 3), которые построены по процедуре, описанной в п. 2.2. Эквивалентные напряжения посчитаны по 4-ой теории прочности.

Предложенные подходы позволяют с единых позиций трехмерной постановки задачи теории упругости (без введения дополнительных гипотез) рассматривать сложные криволинейные композитные линейно упругие конструкции, сочетающие тонкие, толстые оболочки и панели, а также трехмерные линейно упругие тела с криволинейными границами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Матвеев А.Д.** Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНТИ № 2990–В00. — Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2000. — 30 с.
2. **Matveev A.D.** Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // ПМТФ. — 2004. — № 3. — С. 161–171.
3. **Матвеев А.Д.** Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микрон неоднородной структурой // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. — 2014. — № 1/1. — С. 80–83.
4. **Норри Д., де Фриз Ж.** Введение в метод конечных элементов. — М: Мир, 1981. — 304 с.
5. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. — М: Мир, 1975. — 541 с.
6. **Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.** Двухсеточное моделирование цилиндрических оболочек и панелей переменной толщины // Вестник КрасГАУ. — 2014. — № 4. — С. 90–97.
7. **Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.** Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Известия АлтГУ. Серия: Математика и механика. — 2014. — № 1/1. — С. 84–89.



## REFERENCES

1. **Matveev A.D.** Some approaches to the design of elastic multigrid finite elements [Nekotorye podkhody proektirovaniya uprugikh mnogosetochnykh konechnykh elementov] // Dep. in VINITI № 2990–B00. – Krasnojarsk: Institute of computational modelling SB RAS, 2000. – 30 p. (in Russian)
2. **Matveev A.D.** Multigrid models of composite materials of irregular structure with a small filling ratio // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2004. – V. 45, № 3. – P. 440–448.
3. **Matveev A.D.** Constructing the Composite Multi-Grid Elements of Heterogeneous and Micro-Heterogeneous Structures [Postroenie slozhnykh mnogosetochnykh elementov s neodnorodnoi i mikroneodnorodnoi strukturoi] // Izvestija AltGU. Serija: Matematika i mekhanika. – 2014. – № 1/1. – P. 80–83. (in Russian)
4. **Norrie D.H. and de Vries G.** An introduction to finite element analysis. – New York: Academic Press, 1978. – 301 p.
5. **Zienkiewicz O.C.** Finite Element Method in Engineering Science. – London: McGraw-Hill, 1971. – 521 p.
6. **Matveev A.D., Grishanov A.N.** Double-grid modeling of cylindrical shells and panels of variable thickness [Dvukhsetochnoe modelirovanie tcilindricheslikh obolochek i panelei peremennoi tolshiny] // Vestnik KrasGU. – 2014. – № 4. – P. 90–97. (in Russian)
7. **Matveev A.D., Grishanov A.N.** Single and Double Grid Curvilinear Elements of Three-Dimensional Cylindrical Panels and Shells [Oдно- i dvukhsetochnye krivolineinye elementy trekhmernykh tcilindricheslikh panelei i obolochek] // Izvestija AltGU. Serija: Matematika i mekhanika. – 2014. – № 1/1. – P. 84–89. (in Russian)